Лекция 13. Математические модели в системном анализе

1. Классификация моделей.
2. Элементы математической модели.
3. Блок-схема математической модели (по Дж. Форрестеру).

1. Классификация моделей.

Модель – упрощенное подобие системы - оригинала.

Модель – формальное выражение основных элементов проблемы в физических или математических терминах, которое отображает свойства объекта исследования, взаимосвязи, структурные и функциональные параметры.

Модель – логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса (обычно рассматриваемых как системы или элементы системы). Модель используется как условный образ, сконструированный для упрощения их исследования.

Природа моделей может быть различной. В зависимости от особенностей системы-оригинала и задач исследования применяются разнообразные модели. Их классифицируют следующим образом:

Модели

Словесные **Реальные** **Знаковые**

концептуальные ***математические:***

Аналитические и имитационные

Детерминированные и стохастические

Статические и динамические

Дискретные и непрерывные

Точечные и пространственные

Рис. Классификация моделей

Словесные модели – описание моделируемых процессов и объектов при помощи слов. Некоторые специалисты по системному анализу считают построение «словесной» модели важным этапом, на котором объединяется все, что связано с решаемой проблемой, с целью выделения той части системы, которую, с их точки зрения, необходимо исследовать. Часто несколько ученых, занимающихся одной и той же проблемой, не соглашаются с описанием своих коллег, предложенным для данной экологической системы. Поэтому есть все основания потратить определенное время на то, чтобы найти описание (определения, термины), удовлетворяющее всех заинтересованных исследователей. Такое описание может во многом помочь на стадиях постановки задачи и ограничения ее степени сложности и установления иерархии целей и задач исследования. В такой роли «словесная» модель может принести неоценимую пользу.

Реальные модели отражают существенные черты оригинала. Например: аквариум с растениями, животными, микроорганизмами воспроизводит некоторые черты обитаемых природных водоемов уже потому, что сам является населенным водоемом, хотя и меньших размеров. Одна из наиболее сложных проблем, возникающих при работе с реальными моделями – трудность установления степени соответствия модели оригиналу и, следовательно, трудность обоснования возможности применения результатов моделирования к исходной системе-оригиналу.

Натурные модели широко применяются в аэро- и гидродинамике, где разработаны количественные модели адекватности. Кроме того, создание и использование натурных моделей в экологии связано с трудностями технического характера, преодоление которых, из-за отсутствия гарантий адекватности, не всегда приводит к решению поставленной задачи.

Знаковые модели представляют собой условное описание системы-оригинала с помощью определенного алфавита символов и операций над символами, в результате чего получаются слова и предложения некоторого языка, которые с помощью определенного кода интерпретируются как образы некоторых свойств элементов системы-оригинала и связей между ними.

Математическая модель – набор формальных соотношений, которые отображают поведение исследуемой системы. Математическая модель является самой сложной и наиболее общей и абстрактной по сравнению с изобразительной и аналоговой. В ней для отображения свойств изучаемого явления используются символы математического или логического характера. Особые трудности возникают при решении задач с большой размерностью, расплывчатой постановкой, неопределенностью информации и т.д. В постановке таких задач появляются неклассические моменты, такие, как плохая формализуемость, нестандартность, противоречивость. Математические модели служат отражению и анализу некоторых свойств действительных объектов.

Концептуальная модель представляет собой более формализованный и систематизированный вариант традиционного естественнонаучного описания изучаемой системы, состоящий из научного текста, блок-схемы системы, таблиц, графиков, набора символов, математических зависимостей и т. д. Это могут быть определенные конструкции из общепринятых знаков на бумаге или другом материальном носителе или в виде компьютерной программы.

Назначение концептуальной модели – быть ясным, обобщенным и, в то же время, достаточно полным выражением знаний и представлений исследователя об изучаемой системе в рамках и средствами определенной научной концепции.

Например, в рамках «энергетической» и «биохимической» концепции соответствующие концептуальные модели принимают форму блок-схемы трофических связей или потоков вещества в экосистеме, сопровождающуюся поясняющим текстовым, табличным, графическим материалом, раскрывающим состав, структуру и функции системы.

Аналитические и имитационные модели.

Аналитические модели (англ. analytical models) – один из классов математического моделирования, широко используемый в экологии. Они ориентированы на углубление знаний и получении информации о сущности объекта. Аналитические модели описывают поведение системы i-того уровня, используя знания и параметры уровня i-1. Аналитические модели иначе называют функциональными, они являются инструментом фундаментальной науки.

При построении таких моделей исследователь сознательно отказывается от детального описания экосистемы, оставляя лишь наиболее существенные, с его точки зрения, компоненты и связи между ними, и использует достаточно малое число правдоподобных гипотез о характере взаимодействия компонентов и структуры экосистемы. Аналитические модели служат, в основном, целям выявления, математического описания, анализа и объяснения свойств или наблюдаемых феноменов, присущих максимально широкому кругу экосистем. Так, например, широко известная модель конкуренции Лотки–Вольтерра позволяет указать условия взаимного сосуществования видов в рамках различных сообществ.

В качестве примера аналитической модели гидробиологических процессов "цветения водохранилищ" укажем на работы С.В. Крестина и Г.С. Розенберга [1996, 2002], где в рамках взаимодействий систем конкуренции видов и "хищник - жертва" дано возможное объяснение феномена вспышек численности сине-зеленых водорослей и более сложного процесса "волны цветения" по профилю водохранилища.

Имитационные модели (англ. simulation models) – один из основных классов математического моделирования. Целью построения имитаций является максимальное приближение модели к конкретному (чаще всего уникальному) экологическому объекту и достижение максимальной точности его описания. Имитационные модели претендуют на выполнение как объяснительных, так и прогнозных функций. Имитационные модели являются описанием системы в пределах одного уровня иерархии и представляют собой уравнения, отражающее связь между параметрами в данной системе.

Имитационные модели реализуются на ЭВМ с использованием блочного принципа, позволяющего всю моделируемую систему разбить на ряд подсистем, связанных между собой незначительным числом обобщенных взаимодействий и допускающих самостоятельное моделирование с использованием своего собственного математического аппарата. Такой подход позволяет также достаточно просто конструировать, путем замены отдельных блоков, новые имитационные модели.

Построение имитационной модели может служить организующим началом любого серьезного экологического исследования. Хотя частная экосистема реки или озера и является элементарной ячейкой биосферы, ее математическая модель описывается системами уравнений того же порядка сложности, что и вся биосфера в целом, поскольку требует учета такого же большого количества переменных и параметров, описывающих функционирование отдельных подсистем и элементов (только на ином масштабном уровне). Поэтому исследователи ищут разумный компромисс: при составлении моделей многие параметры берутся агрегировано, допускаются разного рода аппроксимации и гипотезы, многие коэффициенты принимаются "по аналогии" с другими объектами и т.д. Поскольку среди допущений и предположений трудно выбрать наилучшее, снижается точность и познавательная ценность моделей, а, следовательно, их практическая применимость.

Методы построения имитационных моделей чаще всего основываются на классических принципах системной динамики Дж. Форрестера [1978] (см. также [Гильманов, 1978; Крапивин с соавт., 1982]). Создание имитационных моделей сопряжено с большими затратами. Так, модель ELM (злаковой экосистемы, используемой под пастбище) строилась 7 лет с годовым бюджетом программы в 1,5 млн. долл. около 100 научными сотрудниками из более 30 научных учреждений США, Австралии и Канады [цит. по: Розенберг., 1984].

Детерминированные и стохастические

По степени точности предсказания оператора F модели делятся на детерминированные (или детерминистские) и стохастические.

Если предыдущее состояние системы однозначно определяет последующее состояние, то система или модель называется детерминистской. В качестве примера можно привести модели, описанные с помощью дифференциальных уравнений. Если, зная состояние системы в данный момент времени, можно лишь указать вероятности наступления того или иного состояния в следующий момент времени, то система называется вероятностной или стохастической. Для описания и исследования таких систем применяется математический аппарат теории случайных процессов.

Детерминированные модели точно дают значения переменных состояния $\mathbf{X}_1$ (t)….$\mathbf{X}_n$ (t), причем каждому моменту времени t соответствует только одно значение **X.** Модели в физике в основном такие.

Стохастические модели в любой момент времени (или при любой дозе фактора) дают несколько значений $\mathbf{X}_i$, точнее – распределение значений.

Так и будет, если в основу моделей положить факт изменчивости живых организмов. Обычно назначение таких моделей – отразить изменчивость, характерную для живых систем. Серия реальных экспериментов (со всей их стохастичностью (изменчивостью)) позволяет найти общий закон – фактически детерминистскую модель.

Один простой пример такой модели, соответствующий детерминистской модели экспоненциального роста, задается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = \big(a + b(t)\big) * y \,,$$

где y – плотность популяции в момент времени t; a – константа, b(t) – случайная переменная с нулевым средним. Это значит, что величина b(t) меняется, принимая значения из некоторого случайного распределения так, что между флуктуациями в последовательные моменты нет никакой корреляции. Легко видеть, что если основой для имитации служит стохастическая модель, то результаты имитации будут различаться, даже если константы и начальные условия одинаковы. Эту вариабельность обеспечивают вероятностные элементы модели; назначение таких моделей именно в том и состоит, чтобы отразить изменчивость, характерную для живых организмов и экологических систем.

Статические и динамические (по степени приближения к равновесному состоянию системы).

Статические модели – не включают переменную времени (t). Всё, что зависит от времени в такой модели, игнорируют. Следовательно, это только приближение к реальности, допущение, т.к. все меняется во времени. Эти модели используют, когда система находится в равновесии со средой или внешние условия можно считать неизменными.

Например модель крыши, которая давит на сарай, или модель поглощения светового потока листом (условие – лист не реагирует на изменение светового потока) – эта статическая модель – элемент динамической модели роста растений.

К *динамическим* моделям можно отнести все модели, где рассматриваются различные параметры биосистем в динамике от времени или другой независимой величины.

Основные характеристики динамических моделей состоят в том, что экологическая система рассматривается в динамике во времени, т.е. происходит изменение количественных характеристик (численности, биомассы) в динамике, описываемой непрерывными функциями.

Трудности динамических моделей заключаются в том, что не всегда легко предсказать поведение даже самых простых моделей. Достаточно лишь одной нелинейности и двух петель обратной связи, чтобы поведение модели стало «контринтуитивным», т.е. противоречило нашим интуитивным представлениям о системе. С другой стороны, ничего не стоит построить модель, не совпадающую с действительностью или неустойчивую. Еще одна трудность связана с тем, что для выяснения механизма функционирования модельной системы обычно необходимо провести много специальных экспериментов с моделью. Например, всегда приходится проверять поведение модели в ответ на одновременное изменение двух или более входных переменных и только в редких случаях достаточно проверить реакцию на изменение лишь одной переменной.

Дискретные и непрерывные (по характеру описания во времени)

дискретные описывают поведение системы в фиксированные моменты времени.

непрерывные рассчитать значения переменных для любой точки интервала (t_0–>t_n).

Точечные и пространственные (математические модели по характеру описания строения системы в пространстве бывают точечные и пространственные).

В *точечных* переменные состояния зависят только от времени $X_i(t)$. В *пространственных* нужно учесть еще и трехмерность нашего пространства.

2.Элементы математической модели

Создание математических моделей является частью современных научных исследований. В любом случае необходимо четко сформулировать проблему, установить цели исследования и обосновать подход к моделированию. При решении разных задач в сельском хозяйстве и экологии часто используют динамические детерминированные модели. Такие модели строят на допущении, что в любой момент времени можно количественно определить состояние системы. В динамических моделях обязательно должны быть следующие элементы:

Переменные состояния, переменные скорости, вспомогательные переменные, управляющие переменные, параметры и константы.

Переменные состояния (или «фазовые переменные») – величины, описывающие состояние системы в любой заданный момент времени.

Пример: Биомасса (масса сухого вещества растений), площадь поверхности листьев, численность особей популяции, количество азота в почве.

То есть, переменные состояния это то, что можно измерить, остановив мгновенье.

При построении модели в число переменных состояния следует включать те количественные характеристики или свойства системы, которые реально можно измерить, которые информативны и представляют интерес для исследователя.

Опишем систему через q переменных состояния X_1, $X_2 \ldots X_q$. Модель будет проще, если они независимы друг от друга, то есть ни одна из переменных не может быть численно определена через значения других. Пусть площадь поверхности листьев A связана с биомассой растения W четким соотношением $A=kW$, (k – постоянный коэффициент). Тогда в качестве независимой переменной состояния может выступать только какая-либо одна из названных характеристик. Численные значения переменных X_1, $X_2 \ldots X_q$ единственным образом опишут систему в момент времени q.

Основная проблема динамического детерминированного моделирования – это построение дифференциальных уравнений, чтобы можно было прогнозировать значения всех переменных состояния в любой заранее заданный момент времени.

Переменные скорости – это величины, характеризующие скорость изменения переменных состояния. Они определяют интенсивность изменения переменных состояния за промежуток времени. Это отношение величины к единице времени (например N/ t). Переменную времени нельзя измерить мгновенно как переменную состояния, обязательно нужен интервал времени.

Примеры: темп роста, интенсивность фотосинтеза, скорость распада белка.

Переменные скорости находят расчетными методами, определив переменные состояния в разные моменты времени.

Часто самые существенные предположения модели относятся к виду зависимости скорости процесса от переменных состояния.

Вспомогательные переменные

В большинстве динамических моделей желательно иметь ряд дополнительных переменных (кроме переменных состояния), которые способствуют более глубокому пониманию объекта и в отдельных случаях упрощающих сопоставление результатов наблюдений. Так, если A, площадь поверхности листьев, и W, масса сухого вещества растений, – независимые переменные состояния, то пользуясь соотношением $A/W=F_A$ можно вычислить индекс поверхности листьев, если это целесообразно для удобства моделирования.

Если мы описываем систему «корень-побег» и знаем сухую массу отдельно корня и побега то можно рассчитать вспомогательную переменную $W=W_{k+}W_n$ – полную масса сухого вещества.

Иногда вспомогательной переменной может быть скорость процесса (пример: удельный темп роста).

Управляющие переменные (или вынуждающие функции) – это переменные, значения которых меняются во времени независимо от поведения изучаемой системы. Рост растений, животных – это результат управления со стороны окружающей среды, воздействие которой на определенных стадиях может рассматриваться как константа.

Управляющие переменные могут иметь характер переменной состояния (t, влажность) или переменной скорости (усвоение питательных веществ, выпадение атмосферных осадков, солнечная радиация) с размерностью «величина в единицу времени».

$E=E(t)$ (условия окружающей среды, зависящие от времени).

Параметры и константы – это не зависящие от времени количественные показатели и коэффициенты, включаемые в математические модели.

Константа – это точная численная величина, которая остается неизменной при варьировании условий эксперимента или при использовании модели для проверки различных гипотез (число секунд в сутках, молекулярная масса глюкозы и т.д.).

Параметр – обычно характеристика с меньшей определённостью значения, чем у константы, но остается неизменной на протяжении одного прогона модели.

Пример: эффективность фотосинтеза (в %), дыхательный коэффициент и т.д.

На параметры влияют условия эксперимента, генотип. Иногда в модель включают малоизученные параметры, если надо уточнять их значения сравнивая данные модели с результатами экспериментов (этот процесс называют калибровкой модели).

Для обозначения множества параметров и констант используют символ P.

3. Блок-схема математической модели (по Дж. Форрестеру).

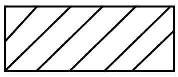
Математические модели могут отображать данную систему лишь с той степенью точности, с какой уравнения, описывающие свойства компонентов модели, отображают свойства компонентов реальной системы.

Одна из привлекательных особенностей динамических моделей заключается в возможности использования диаграммы связей для представления основных взаимодействий в сложной системе.

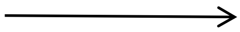
Условные обозначения для динамических моделей предложены Джеем Форрестером в1971г. они применялись для промышленных систем, хотя приемлемы и в экологии. (См. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. М.: Прогресс, 1971г.)

Основные элементы и взаимодействия системы.

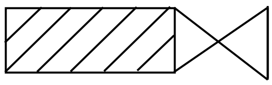
Переменная состояния



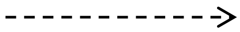
поток вещества



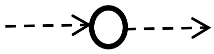
Переменная скорости



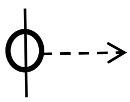
поток информации



Вспомогательные и управляющие переменные



Параметры и константаы



Регулирование скорости потока показывается знаком вентиля.

Рисунки 2 и 3 иллюстрирует пример использования этих символов для описания экспоненциального и логистического раста.

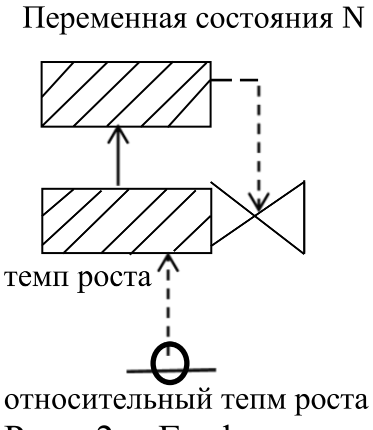


Рис 2. Графическая модель экспоненциального роста численности популяции N.

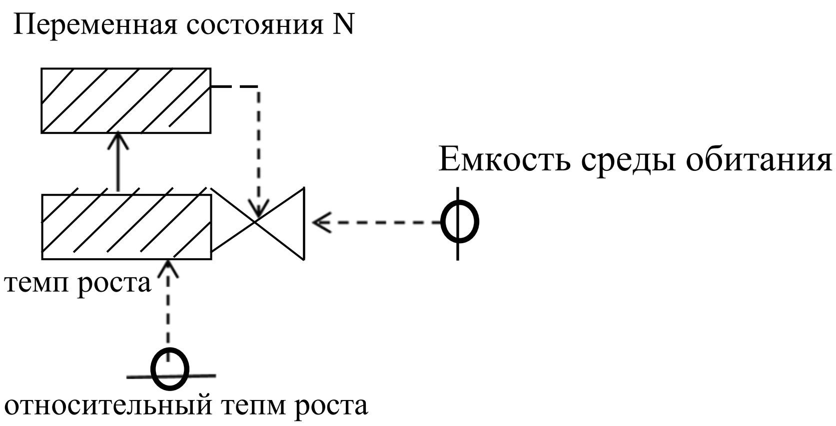
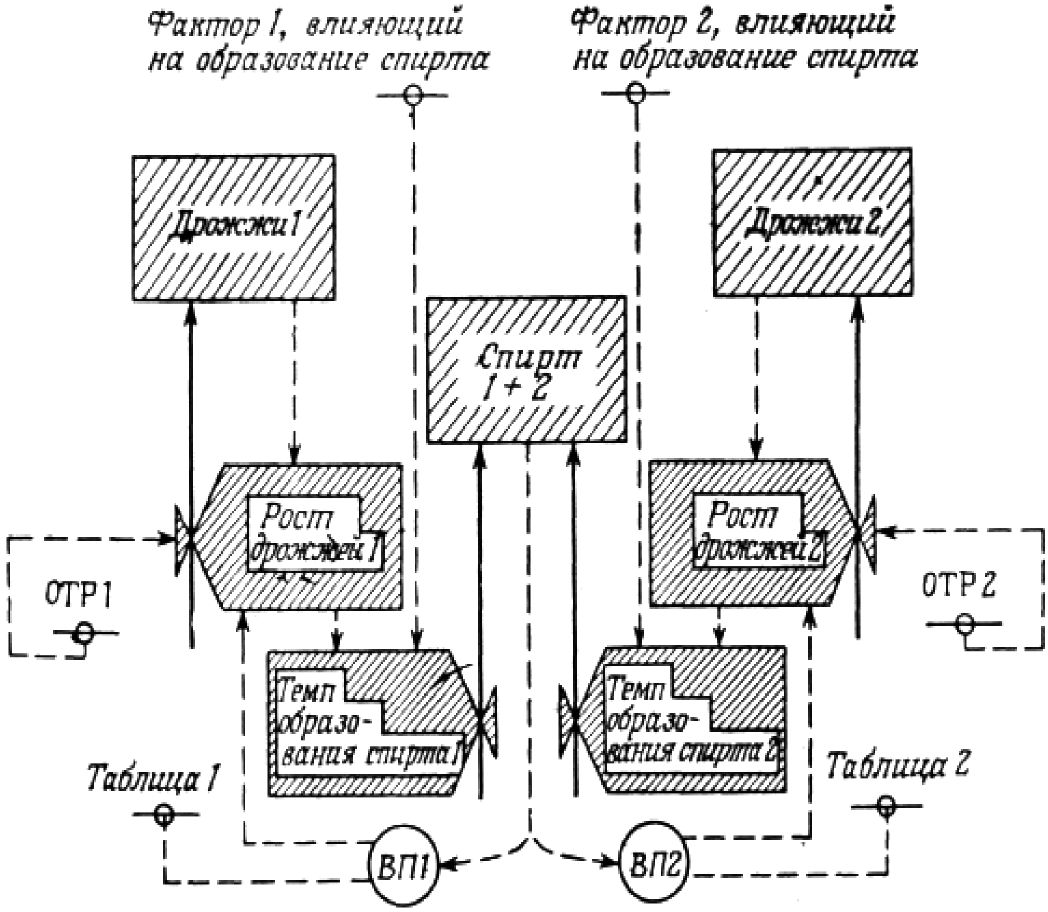


Рис 3. Графическая модель логистического роста численности популяции N.

При экспоненциальном росте количество N регулируется темпом роста, который в свою очередь зависит от относительного темпа роста (биотический потенциал), считающегося константой, и начального значения N. При логистическом росте N регулируется темпом роста, который зависит от текущего значения N и двух констант – относительного темпа роста и емкости среды обитания.

Еще один приме использования условных обозначений Форрестера - диаграмма роста дрожжей в смешанной культуре:



Литература:

1. Джефферс, Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии/ Дж. Джефферс; пер. с англ. Д. О. Логофета; под ред. и с предисл. Ю. М. Свирежева. М.: Мир, 1981. – 256 с.
2. Дулепов В.И., Лескова О.А., Майоров И.С. Системная экология/ под ред. Александровой Л.И Учеб. пособие: Владивосток, 2004, 209 с.
3. Розенберг Г.С., Мозговой Д.П., Гелашвили Д.Б. Экология. Элементы теоретических конструкций современной экологии (Учебное пособие). - Самара: Самарский научный центр РАН, 2000. - 396 с.
4. Пузаченко, Ю. А. Математические мотоды в экологических и географических исследованиях. / Ю. А. Пузаченко. Учеб. пособ. для студ. вузов. – М.: Издательский центр «академия», 2004, - 416 с.
5. Петракова Н.В. Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры / Н.В. Петракова. Брянск: Издательство Брянская ГСХА. 2011. – 162 с.
6. Смиряев, А.В. Моделирование: от биологии до экономики: учеб. пособие для студентов специальности «селекция и генетика сельскохозяйственных культур»/ А.В. Смиряев, А.В. Исачкин, Л.К. Харрасова. М.: Изд-во. МСХА, 2002. – 122 с.